SUR L'ÉCART DE DEUX COURBES ET SUR LES COURBES LIMITES*

PAR

MAURICE FRÉCHET

Définition de l'arc de courbe continue.

Appelons arc de courbe continue l'ensemble *ordonné* formé par la suite des points que l'on obtient en faisant croître t de t_0 à t_1 dans les formules :

$$(1) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t),$$

où f, g, h sont trois fonctions de t uniformément continues de t_0 à t_1. Il pourra d'ailleurs arriver que f, g, h soient en même temps constantes dans un intervalle partiel (t'_0, t'_1) de valeurs de t ; alors toutes les valeurs de t comprises dans cet intervalle correspondent à un même point de la courbe. (Il est utile de ne pas exclure ce cas pour ne pas nuire à la géneralité des propositions que nous voulons établir). En particulier, il pourrait se faire que f, g, h soient constants de t_0 à t_1 ; alors la courbe se réduit à un seul point. D'ailleurs, dans tout autre cas, les points de la courbe occupent dans l'espace une infinité non dénombrable de positions.

Lorsque f, g, h ne sont en même temps constants dans aucun intervalle de valeurs de t, nous dirons que les formules (1) fournissent une représentation *normale* de la courbe.

Il peut arriver que les formules (1) donnent à x, y, z les mêmes valeurs pour deux valeurs différentes de t : t'_0, t'_1 sans que f, g, h soient constants entre ces deux valeurs de t. Alors t'_0 et t'_1 correspondent à deux points de la courbe *que nous considèrerons comme distincts* quoiqu'ils occupent la même position dans l'espace ; nous aurons ainsi un point *multiple* de la courbe.

Recherche de toutes les représentations paramétriques d'une courbe continue.

Considérons maintenant, outre les formules (1), les formules :

$$(2) \qquad x = \phi(u), \qquad y = \psi(u), \qquad z = \chi(u)$$

où ϕ, ψ, χ sont des fonctions de u, uniformément continues dans l'intervalle

* Received for publication May 25, 1905. Presented to the Society at the summer meeting, 1905.

(u_0, u_1). Ces formules (1) et (2) représentent deux ensembles de points ordonnés: C et Γ. Nous dirons que ces formules représentent la même courbe lorsque les ensembles *ordonnés* C et Γ sont superposables. Nous entendons par là qu'on peut établir entre les points de C et de Γ une correspondance univoque et réciproque de façon que deux points correspondants occupent la même position dans l'espace et que deux points quelconques de C soient trouvés dans le même ordre relatif que les deux points correspondants de Γ quand on parcourt C et Γ dans les sens des t et des u croissants. Observons que d'après cette définition, les courbes C et Γ peuvent être formées avec les mêmes points de l'espace et être cependant distinctes.*

Cherchons les relations qui doivent exister entre f, g, h; ϕ, ψ, χ pour que les formules (1) et (2) représentent la même courbe, au sens que nous venons d'indiquer.

1° Pour cela, supposons d'abord que les représentations (1) et (2) soient normales. Alors à deux valeurs distinctes de t correspondront deux points distincts (quoique pouvant coïncider en position) de la courbe C et réciproquement. De même, tout point de Γ correspondra à une seule valeur de u et réciproquement. Par suite la correspondance entre les points de C et de Γ se traduira par une correspondance univoque et réciproque entre les valeurs de t et de u, dans laquelle t et u croissent en même temps. Autrement dit, on aura, pour deux points correspondants:

$$u = \theta(t),$$

θ étant une fonction de t qui croît constamment de u_0 jusqu'à u_1 lorsque t croît de t_0 à t_1. Cette fonction doit passer par toutes les valeurs de u intermédiaires entre u_0 et u_1; comme elle est aussi croissante, elle sera donc nécessairement continue. Et l'on aura de t_0 à t_1:

$$(3) \qquad f(t) \equiv \phi[\theta(t)], \qquad g(t) \equiv \psi[\theta(t)], \qquad h(t) \equiv \chi[\theta(t)].$$

Réciproquement, étant donnée la représentation normale d'une courbe C les formules (1) définiront la même courbe lorsqu'on prendra pour f, g, h, les fonctions définies par (3) où $\theta(t)$ est une fonction continue et croissante de t; et la représentation paramétrique (1) sera aussi normale.†

2° Supposons maintenant que les courbes C et Γ soient données par les représentations (1) et (2) choisies arbitrairement, non nécessairement normales et cherchons encore la condition pour que ces deux courbes coïncident. Tout d'abord, si l'une se réduit à un seul point il en sera de même de l'autre. Dans le cas

* Il suffit de prendre: $f \equiv g \equiv 0$, $h \equiv \sin t$; $\phi \equiv \psi \equiv 0$, $\chi \equiv 2t/\pi \sin^2 \pi^2/2t$, $t_0 = u_0 = -\pi/a$, $t_1 = u_1 = +\pi/a$. Voir *Leçons sur l'intégration*, par HENRI LEBESGUE, Paris, 1904, p. 40.

† En général, on se contente de dire que *par définition*, les formules (1) et (2) définissent la même courbe, si l'on peut trouver une fonction telle que $\theta(t)$ donnant lieu aux identités (3).

contraire montrons que l'on peut ramener le problème au précédent. Autrement dit : *une courbe continue qui ne se réduit pas à un seul point a toujours au moins une représentation paramétrique normale.* En effet, considérons tous les intervalles I où f, g, h sont à la fois constants. Ces intervalles sont sans points communs, sans quoi on pourrait les remplacer par de plus grands. Or il est facile de démontrer que si l'on se donne sur l'axe des t entre t_0 et t_1 un ensemble quelconque d'intervalles I sans points communs, et n'occupant pas tout le segment (t_0, t_1), on peut trouver une fonction continue : $s = a(t)$, allant sans jamais décroître de 0 à 1 quand t croit de t_0 à t_1 et qui n'est constante que dans chacun des intervalles I. Alors à chaque valeur de s correspond une valeur de t ou une infinité de valeurs de t comprises dans un même intervalle où f, g, h sont constants. Dès lors, à une même valeur de s correspond un seul point de C et on peut écrire :

$$f(t) = f_0(s), \qquad g(t) = g_0(s), \qquad h(t) = h_0(s),$$

t variant de t_0 à t_1 et s de 0 à 1 ; et à deux valeurs de s distinctes correspondront deux points de C distincts (mais qui coïncident peut-être en position). Alors, si nous considérons les formules :

$$x = f_0(s), \qquad y = g_0(s), \qquad z = h_0(s) \qquad\qquad (0 \leq s \leq 1),$$

nous pourrons dire qu'elles constituent une représentation normale de C. Car lorsque s croît, on retrouve les points de C chacun une seule fois et dans le même ordre. Du moins cette affirmation sera complètement justifiée dès que nous aurons prouvé que f_0, g_0, s_0 sont uniformément continues de 0 à 1. Or s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une infinité de valeurs de s distinctes et comprises entre 0 et 1 : $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n, \cdots$ qui tendent vers un certain nombre s_0 et sont telles que par exemple $|f_0(s_n) - f_0(s_0)|$ reste supérieur à un nombre positif fixe ϵ. Or, à tout nombre s_n compris entre 0 et 1, la formule $s = a(t)$ fait correspondre au moins une valeur t_n de t compris entre t_0 et t_1. Les points $t_1, t_2, t_3, \cdots$ de l'axe des t ont au moins un point limite t_0 ; autrement dit, il y a dans la suite $t_1, t_2, t_3, \cdots$ au moins une suite $t_{n_1}, t_{n_2}, \cdots$ qui a une limite déterminée t_0. Comme la fonction $a(t)$ est continue, on aura donc :

$$s_0 = \lim s_{n_p} = \lim a(t_{n_p}) = a(t_0)$$

et par suite :

$$|f_0(s_{n_p}) - f_0(s_0)| = |f_0[a(t_{n_p})] - f_0[a(t_0)]| = |f(t_{n_p}) - f(t_0)|.$$

Comme $f(t)$ est une fonction continue, le dernier terme tend vers zéro avec $1/p$; il est donc impossible que le premier reste supérieur à ϵ. La proposition est ainsi démontrée.

Revenons aux courbe C et Γ. D'après ce qui précède on pourra, en choisissant convenablement deux fonctions $s = a(t)$, $v = \alpha(u)$ continues et allant sans jamais décroître de 0 à 1, écrire les formules (2) sous formes normales:

$$(1)' \qquad x = f_0(s), \qquad y = g_0(s), \qquad z = h_0(s) \qquad (0 \leqq s \leqq 1),$$

$$(2)' \qquad x = \phi_0(v), \qquad y = \psi_0(v), \qquad z = \chi_0(v) \qquad (0 \leqq v \leqq 1).$$

Dès lors, si les courbes C et Γ coïncident c'est que les deuxièmes membres de ces formules sont égaux deux à deux sous la condition:

$$(3) \qquad v = \theta(s),$$

θ étant une fonction continue et toujours croissante de 0 à 1. Observons d'ailleurs que la fonction $\theta[a(t)]$ est, comme $a(t)$ une fonction continue allant, sans jamais décroitre, de 0 à 1 et qui n'est constante que dans les intervalles I. On aurait donc pu prendre la fonction $\theta[a(t)]$ au lieu de $a(t)$ et alors la relation (3) serait remplacée par $v = s$.

En définitive, *lorsqu'aucune des courbes* (1) *et* (2) *ne se réduisent à un point, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles représentent la même courbe est qu'il existe deux fonctions* $a(t)$ *et* $\alpha(u)$ *continues allant sans jamais décroître de* 0 *à* 1, *n'étant constantes que dans les intervalles où il en est respectivement de même pour* f, g, h *et pour* ϕ, ψ, χ *et telles que l'égalité:* $a(t) = \alpha(u)$ *entraine:*

$$f(t) = \phi(u), \qquad g(t) = \psi(u), \qquad h(t) = \chi(u).$$

En particulier, on voit que si $\theta(t)$ est une fonction continue de t qui va sans jamais décroitre de u_0 à u_1 quand t croit de 0 à 1, les formules:

$$x = \phi[\theta(t)],\ y = \psi[\theta(t)],\ z = \chi[\theta(t)] \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

représentent la même courbe que les formules (2) quand même la représentation (2) se serait pas normale.

Ecart de deux courbes.

Définition de l'écart. — Nous généraliserons maintenant une notion introduite par WEIERSTRASS dans le Calcul des Variations sous le nom de voisinage. Si l'on considère deux courbes *infiniment voisines:*

$$y = f(x), \qquad z = g(x), \qquad \text{et} \qquad y = \phi(x), \qquad z = \psi(x)$$

on peut appeler voisinage de ces deux courbes la valeur maxima de la distance de deux points de ces deux courbes ayant même abscisse. Pour parer au cas où les extrémités n'auraient pas mêmes abscisses, on peut remplacer la correspondance entre deux points de même abscisse par une correspondance entre des points

d'abscisses peu différentes. A chacune de ces correspondances correspondra un nombre particulier, mais ce qui est essentiel c'est que si les deux courbes sont infiniment voisines, tous ces nombres seront infiniment petits.

Nous allons tâcher de généraliser cette notion de façon à l'appliquer à deux arcs de courbes continues quelconques *non nécessairement très voisins.* Pour préciser, nous allons attacher à tout couple C, Γ d'arcs de courbes continues quelconques un nombre positif ou nul que nous désignerons par la notation (C, Γ) ou (Γ, C) et que nous appellerons *écart* des arcs C, Γ. Ce nombre sera tel que: 1° l'écart (C, Γ) n'est nul que si C et Γ coïncident; 2° C_1, C_2, C_3, étant trois arcs de courbes continues quelconques, si les écarts (C_1, C_3) et (C_2, C_3) sont infiniment petits, il en est de même de (C_1, C_2).*

Pour définir cet écart, considérons deux arcs continus quelconques distincts ou non C et Γ. On peut comme nous l'avons vu les représenter d'une infinité de façons par des formules telles que :

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t) \qquad (0 \leq t \leq 1), \tag{4}$$

$$x = \phi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t) \qquad (0 \leq t \leq 1), \tag{5}$$

où f, g, h; ϕ, ψ, χ sont uniformément continues de 0 à 1. Désignons maintenant par $\delta(t)$ la distance de deux points correspondant à la même valeur de t:

$$\delta(t) = \sqrt{[f(t) - \phi(t)]^2 + [g(t) - \psi(t)]^2 + [h(t) - \chi(t)]^2}.$$

$\delta(t)$ est une fonction continue de t qui atteint un maximum absolu d. A chaque système de représentations (normales on non) de C et Γ correspond une valeur déterminée positive ou nulle de d. *J'appellerai écart de C et de Γ la limite inférieure $e = (C, \Gamma)$ de l'ensemble des valeurs de d.* Ce nombre sera lui même positif ou nul.

Simplification du calcul de l'écart. Avant d'étudier les propriétés de ce nombre, il nous sera utile de montrer qu'on peut simplifier le calcul de e en restreignant le nombre des valeurs de d dont il est la limite inférieure.

Observons tout de suite que si l'une des courbes C ou Γ, C par exemple se réduit à un point A, la quantité d est, dans un système de représentations quelconque de C et de Γ, le maximum de la distance de A à un point quelconque de Γ. Donc $e = d$; en particulier, on voit que pour calculer d on peut toujours se restreindre au cas où la représentation de Γ est normale si Γ n'est pas aussi réduite à un point.

Supposons maintenant qu' aucune des courbes C ou Γ ne se réduise à un point; je dis que e sera égal à la limite inférieure e' des valeurs de d qui correspondent seulement aux représentations *normales* de C et de Γ simultanément.

*** On pourra donc appliquer les théorèmes énoncés dans les Comptes-Rendus du 20 Mars 1905. *Sur la notion d'écart dans le Calcul fonctionnel.***

En effet, considérons un système (4), (5) de représentations quelconques de C et de Γ. On a vu qu'on peut trouver deux fonctions $a(t)$, $\alpha(t)$ continues allant sans jamais décroître de 0 à 1, $a(t)$ et $\alpha(t)$ ne restant respectivement constants que dans les intervalles où il en est respectivement de même de f, g, h et ϕ, ψ, χ. On a vu aussi qu'on pouvait alors former des fonctions f_0, g_0, h_0; ϕ_0, ψ_0, χ_0 uniformément continues entre 0 et 1 et telles que

$$(6) \qquad \begin{aligned} f_0[a(t)] &\equiv f(t), & g_0[a(t)] &\equiv g(t), & h_0[a(t)] &\equiv h(t), \\ \phi_0[\alpha(t)] &\equiv \phi(t), & \psi_0[\alpha(t)] &\equiv \psi(t), & \chi_0[\alpha(t)] &\equiv \chi(t). \end{aligned}$$

Posons maintenant :

$$a_n(t) \equiv \left(1 - \frac{1}{n}\right) a(t) + \frac{t}{n}, \qquad \alpha_n(t) \equiv \left(1 - \frac{1}{n}\right) \alpha(t) + \frac{t}{n}$$

les fonctions $a_n(t)$ et $\alpha_n(t)$ seront des fonctions de t qui sont continues *toujours croissantes* de 0 à 1 et qui tendent uniformément vers $a(t)$ et $\alpha(t)$. Dès lors puisque les formules

$$\begin{aligned} x &= f_0(u), & y &= g_0(u), & z &= h_0(u) \\ x &= \phi_0(u), & y &= \psi_0(u), & z &= \chi_0(u) \end{aligned} \qquad (0 \leq u \leq 1)$$

doivent fournir une représentation *normale* de C et Γ, il en sera de même des formules :

$$\begin{aligned} x &= f_0[a_n(t)], & y &= g_0[a_n(t)], & z &= h_0[a_n(t)] \\ x &= \phi_0[\alpha_n(t)], & y &= \psi_0[\alpha_n(t)], & z &= \chi_0[\alpha_n(t)] \end{aligned} \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Soit $\delta_n(t)$ la distance de deux points correspondants dans cette correspondance particulière ; d_n son maximum, δ et d les quantités analogues dans les représentations (4), (5). Les identités (6) et le fait que a_n, α tendent uniformément vers a, α, tandis que $f_0, \cdots, \chi_0$ sont uniformément continues montrent que $\delta_n(t)$ tend uniformément vers $\delta(t)$. Autrement dit, pour $n > p$, on a :

$$\delta_n(t) - \epsilon < \delta(t) < \delta_n(t) + \epsilon$$

d'où :

$$\delta_n(t) - \epsilon < d$$

quelque soit t et par suite :

$$d_n - \epsilon < d.$$

Mais : $d_n \geq e'$, donc : $d > e' - \epsilon$ quelque soit ϵ, d'où : $d \geq e'$. Mais d est une *quelconque* des quantités dont e est la limite inférieure ; donc $e \geq e'$; comme on a évidemment $e' \geq e$, on a $e = e'$.

Nous pouvons aller plus loin encore. Au lieu de prendre pour calculer e *toutes* les représentations normales simultanées de C et de Γ, on peut prendre pour C une représentation normale fixe, faire varier seulement la représentation normale de Γ et prendre la limite inférieure des quantités d ainsi obtenues. En effet, supposons que les formules (4), (5) donnent une représentation *normale* simultanée de C et de Γ, choisie une fois pour toutes. Pour avoir toutes les autres, il suffira d'y remplacer $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ par: $f_1(t)=f[\lambda(t)]$, $g_1(t)=g[\lambda(t)]$, $h_1(t)=h[\lambda(t)]$ et $\phi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ par $\phi_1(t)=\phi[\mu(t)]$, $\psi_1(t)=\psi(\mu(t)]$, $\chi_1(t)=\chi[\mu(t)]$ où $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ sont deux fonctions de t continues et toujours croissantes de 0 à 1. Or si l'on pose $u=\lambda(t)$, la fonction inverse $t=\lambda_1(u)$ sera aussi continue et croissante de 0 à 1 et il en sera de même de la fonction $\theta(u)=\mu[\lambda_1(u)]$.

Dès lors, on aura:

$$\sqrt{[f_1(t)-\phi_1(t)]^2+[g_1(t)-\psi_1(t)]^2+[h_1(t)-\chi_1(t)]^2}$$
$$=\sqrt{\{f(u)-\phi[\theta(u)]\}^2+\{g(u)-\psi[\theta(u)]\}^2+\{h(u)-\chi[\theta(u)]\}^2}$$

pour $u=\lambda(t)$ et par suite le maximum de ces deux quantités sera le même lorsque t variant de 0 à 1, u varie aussi de 0 à 1. Autrement dit, le maximum d obtenu dans la correspondance normale quelconque est égal à l'un de ceux que l'on obtient en laissant la représentation normale de C fixe et en faisant varier la représentation normale de Γ qui pourra être en particulier la suivante:

$$x=\phi[\theta(u)], \qquad y=\psi[\theta(u)], \qquad z=\chi[\theta(u)] \qquad (0\leq u\leq 1).$$

Propriétés de l'écart.

THÉORÈME 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux arcs de courbes continues coïncident est que leur écart soit nul.* En effet, si les deux courbes C, Γ coïncident, on peut leur donner la même représentation paramétrique; donc l'une des quantités d dont leur écart e est la limite inférieure sera nulle. Par suite e est aussi nul.

Réciproquement, supposons que l'écart e de deux arcs C et Γ soit nul. Si l'un de ces arcs, C par exemple, se réduit à un point A, on sait que e est le maximum de la distance de A aux points de Γ. Donc Γ se réduit aussi au point A. Supposons maintenant que ni C, ni Γ ne se réduisent à un point. Alors, nous avons vu que e sera la limite inférieure des quantités d obtenues en prenant pour C une représentation normale fixe (4) et pour Γ la représention normale:

$$x=\phi[\theta(t)], \qquad y=\psi[\theta(t)], \qquad z=\chi[\theta(t)] \qquad (0\leq t\leq 1),$$

où θ est une fonction de t continue et toujours croissante de 0 à 1 et où pour $\theta(t) \equiv t$, on obtient une représentation normale fixe de Γ.

Si e est nul, ou bien l'une des quantites d est nulle et alors C est identique à Γ, ou bien l'on peut trouver une infinité de formes de la fonction θ: $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n, \cdots$ telles que les valeurs correspondantes de d: $d_1, d_2, \cdots, d_n, \cdots$ tendent vers zéro. On aura donc, quels que soient t et n:

$$|f(t)-\phi[\theta_n(t)]|<d_n, \quad |g(t)-\psi[\theta_n(t)]|<d_n, \quad |h(t)-\chi[\theta_n(t)]|<d_n.$$

Par conséquent $\phi[\theta_n(t)]$, $\psi[\theta_n(t)]$, $\chi[\theta_n(t)]$ tendent uniformement vers $f(t), g(t), h(t)$. Cela prouve donc que tout point de C est sur Γ; en effet pour une valeur arbitraire fixe de t: t_2, $\theta_n(t_2)$ reste comprise entre 0 et 1, on peut donc prendre dans $\theta_1, \theta_2, \cdots$ une suite $\theta_{n_1}, \theta_{n_2}, \cdots$ telle que $\theta_{n_1}(t_2), \theta_{n_2}(t_2), \cdots$ tendent vers une limite déterminée ρ. Alors on a:

$$f(t_2)=\lim_{p=\infty}\phi\,[\theta_{n_p}(t_2)]=\phi(\rho)$$

et de même:

$$g(t_2)=\psi(\rho), \qquad h(t_2)=\chi(\rho)$$

ce qui prouve notre assertion. Inversement puisque C et Γ jouent un rôle symmètrique, tout point de Γ est sur C. Ainsi C et Γ sont formées des mêmes points de l'espace, mais il faut montrer que ces points sont rangés dans le même ordre.

Pour cela, rangeons dans une suite déterminée: $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$ l'ensemble dénombrable E des nombres rationnels compris entre 0 et 1. Je dis d'abord que l'on peut extraire de la suite $\theta_1, \theta_2, \cdots$ une suite $\theta_{n_1}, \theta_{n_2}, \cdots$ qui soit convergente en tout point de E. En effet, les nombres $\theta_1(t_1), \theta_2(t), \cdots$ peuvent être considérées comme les abscisses de points compris entre 0 et 1, points qui ont au moins un point limite $\rho(t_1)$. On peut donc former une suite $\theta^{(1)}_{p_1}, \theta^{(1)}_{p_2}, \cdots$ qui converge vers $\rho(t_1)$ pour $t=t_1$. Mais, *dans cette nouvelle suite*, on pourra de même trouver une suite $\theta^{(2)}_{p_1}, \theta^{(2)}_{p_2}, \cdots$ qui converge vers un certain nombre $\rho(t_2)$ pour $t=t_1$ et qui continuera à converger vers $\rho(t_1)$ pour $t=t_1$. Et ainsi de suite.

Si nous considérons maintenant la suite S: $\theta^{(1)}_{p_1}, \theta^{(2)}_{p_2}, \cdots, \theta^{(n)}_{p_n}, \cdots$ elle est formée à partir du rang n de termes qui figurent tous dans la suite $\theta^{(n)}_{p_n}, \theta^{(n)}_{p_{n+1}}, \cdots$. Par conséquent la suite S converge vers un certain nombre $\rho(t_n)$ quelque soit n, comme nous voulions le montrer. La fonction $\rho(t)$ qui jusqu'à présent n'est définie que dans E, n'est jamais décroissante dans E. Car si $t_i>t_k$, on a quel que soit n: $\theta^{(n)}_{p_n}(t_i)-\theta^{(n)}_{p_n}(t_k)>0$ et à la limite $\rho(t_i)-\rho(t_k)\geq 0$. Il en résulte que si t est un nombre quelconque compris entre 0 et 1, les valeurs $\rho(t_i)$ (toutes comprises entre 0 et 1) pourront se ranger en deux classes correspondant aux valeurs de ρ les unes inférieures, les autres supérieures à t et les valeurs de

la première classe seront inférieures aux valeurs de la seconde. Appelons $\rho(t-0)$ et $\rho(t+0)$ la limite supérieure des premières et la limite inférieure des secondes. Enfin posons pour simplifier : $\lambda_n(t) = \theta^{(n)}_{p_n}(t)$. D'après ce qui précède, on aura évidemment quel que soit i :

$$f(t_i) = \lim_{n=\infty} \phi[\lambda_n(t_i)] = \phi[\rho(t_i)]$$

et par suite quelque soit t:

$$f(t) = \phi[\rho(t-0)] = \phi[\rho(t+0)].$$

Si je démontre que quelque soit t_1 on a: $\rho(t-0) = \rho(t+0)$ la fonction $\theta(t)$ qui sera égale à cette valeur commune quelque soit t sera évidemment croissante et continue de 0 à 1 et telle que:

$$f(t) \equiv \phi[\theta(t)], \qquad g(t) \equiv \psi[\theta(t)], \qquad h(t) \equiv \chi[\theta(t)] \quad (0 \leq t \leq 1)$$

ce qui prouvera que C et Γ sont identiques.

Or supposons qu'il existe une valeur ζ de t telle que $\rho(\zeta-0) \neq \rho(\zeta+0)$, et soit u un nombre quelconque compris entre les deux précédents. Si t'_i et t''_k sont deux nombres rationnels compris entre 0 et 1, l'un inférieur à ζ, l'autre supérieur à ζ, on aura:

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n(t'_i) \leq \rho(\zeta-0), \qquad \lim_{n=\infty} \lambda_n(t''_k) \geq \rho(\zeta+0).$$

Donc pour $n > p$:

$$\lambda_n(t'_i) < \rho(\zeta-0) + \epsilon, \qquad \lambda_n(t''_k) > \rho(\zeta+0) - \epsilon.$$

En prenant ϵ assez petit le nombre u sera compris entre $\rho(\zeta-0)+\epsilon$ et $\rho(\zeta+0)-\epsilon$. Par suite, il y aura une valeur $\xi^{(n)}_{i,k}$ de t comprise entre t'_i, t''_k telle que la fonction continue croissante λ_n prenne la valeur $\lambda_n(\xi^{(n)}_{i,k}) = u$, d'où:

$$f(\xi^{(n)}_{i,k}) = \phi(u), \qquad g(\xi^{(n)}_{i,k}) = \psi(u), \qquad h(\xi^{(n)}_{i,k}) = \chi(u).$$

Lorsque n croit indéfiniment les points $\xi^{(n)}_{i,k}$ ont au moins un point limite $\xi_{i,k}$ compris entre t'_i et t''_k; donc:

$$f(\xi_{i,k}) = \phi(u), \qquad g(\xi_{i,k}) = \psi(u), \qquad h(\xi_{i,k}) = \chi(u).$$

Faisons maintenant tendre t'_i et t''_k vers ζ, on aura :

$$\phi(u) = \lim f(\xi_{i,k}) = f(\zeta) = \phi[\rho(\zeta-0)] = \phi[\rho(\zeta+0).$$

et de même :

$$\psi(u) = \psi[\rho(\zeta-0)] = \psi[\rho(\zeta+0)], \qquad \psi(u) = \chi[\rho(\zeta-0)] = \chi[\rho(\zeta+0)].$$

Il en résulte que quelque soit le nombre u compris entre $\rho(\zeta - 0)$ et $\rho(\zeta + 0)$, les fonctions $\phi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ conservent chacune une valeur constante. Donc la représentation (5) ne serait pas normale ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi C et Γ sont bien identiques.

THÉORÈME 2. *Etant donnés trois arcs de courbes continues quelconques C_1, C_2, C_3; on a toujours la relation suivante entre leurs écarts*

$$(C_1, C_2) \leqq (C_1, C_3) + (C_2, C_3).$$

En effet, considérons trois représentations quelconques de C_1, C_2, C_3:

$$x = f_i(t), \qquad y = g_i(t), \qquad z = h_i(t), \qquad (0 \leq t \leq 1) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

On a:

$$\sqrt{(f_1 - f_2)^2 + (g_1 - g_2)^2 + (h_1 - h_2)^2} \leq \sqrt{(f_1 - f_3)^2 + (g_1 - g_3)^2 + (h_1 - h_3)^2} + \sqrt{(f_2 - f_3)^2 + (g_2 - g_3)^2 + (h_2 - h_3)^2}.$$

Appelons d_3, d_2, d_1 les maxima respectifs des trois radicaux quand t varie. On aura quel que soit t:

$$\sqrt{(f_1 - f_2)^2 + (g_1 - g_2)^2 + (h_1 - h_2)^2} \leq d_2 + d_1,$$

par suite le maximum d_3 du premier membre sera au plus égal à $d_1 + d_2$. D'ailleurs quel les que soient les représentations adoptées, on aura: $d_3 \geq (C_1, C_2)$ et par suite:

$$(C_1, C_2) \leq d_2 + d_1.$$

Le premier membre est fixe, le second a pour limite inférieure $(C_1, C_3) + (C_2, C_3)$, la proposition est donc établie.

Limite de courbes continues.

Il est à peine utile de faire observer l'analogie entre la notion de distance de deux points et celle d'écart de deux courbes, qui est mise en évidence par les théorèmes 1 et 2. Nous profiterons de cette analogie pour définir ainsi la limite d'une suite de courbes: *Nous dirons qu'une suite d'arcs continus*

$$C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, \cdots,$$

a pour limite un arc continu C lorsque l'écart (C, C_n) tend vers zéro avec $1/n$. Les théorèmes 1 et 2 montrent que cette définition satisfait aux deux conditions suivantes: 1° si C_1, C_2, $\cdots$, C_n, $\cdots$ sont des courbes continues identiques à une même courbe C, elles ont pour limite C; 2° si C_1, C_2, C_3, $\cdots$, C_n, $\cdots$ ont

une limite C, toute suite infinie extraite de la première en conservant l'ordre tendra aussi vers C.*

On peut ramener cette définition à la définition ordinaire au moyen de la proposition suivante :

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un arc continu C_n tende vers un arc continu déterminé C lorsque n croit indéfiniment, est que, quelle que soit la représentation paramétrique de C:*

$$(6) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t) \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

on puisse choisir celle de C_n:

$$(7) \qquad x = f_n(t), \qquad y = g_n(t), \qquad z = h_n(t) \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

de façon que f_n, g_n, h_n tendent uniformément vers f, g, h respectivement.

En effet, on a en appelant d_n le maximum de la distance $\delta_n(t)$ de deux points correspondants :

$$(C, C_n) \leq d_n$$

et comme $\delta_n(t)$ tend uniformément vers zéro, d_n et par consequent (C, C_n) tendent aussi vers zéro.

Réciproquement, la représentation de C étant fixée, en faisant varier celle de C_n, on obtient différentes valeurs de d_n, dont (C, C_n) est la limite inférieure. Par conséquent, on pourra choisir la représentation de C_n de façon que l'on ait :

$$d_n < (C, C_n) + \frac{1}{n}.$$

Et alors pour une telle représentation, on aura,

$$|f - f_n| < (C, C_n) + \frac{1}{n}, \quad |g - g_n| < (C, C_n) + \frac{1}{n}, \quad |h - h_n| < (C, C_n) + \frac{1}{n}.$$

Donc si (C, C_n) tend vers zéro avec $1/n$, les fonctions f_n, g_n, h_n tendront uniformément vers f, g, h.

Remarque. On voit que si C_n tend vers C (non réduit à un point), on peut établir entre les points de C_n et de C *une* correspondance univoque et réciproque dans laquelle l'ordre soit conservé, de façon que si M_n de C_n correspond à M de C, M_n tend vers M et cela uniformément. On peut se demander, ce que devient le point M_n qui correspond à M dans une correspondance *quelconque* analogue à la première, en supposant toujours que C_n tend vers C. Dans le cas où C se

---

*On peut donc lui appliquer les théorèmes énoncés dans les Comptes-Rendus du 21 Nov. 1904. *Généralisation d'un théorème de Weierstrass* et du 2 Janvier 1905 : *Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles.*

réduit à un point, M_n tendra encore vers ce point. Si C ne se réduit pas à un point, il en sera de même de C_n pour n assez grand ; il y aura donc parmi les représentations de C et C_n, une représentation *normale* simultanée (6), (7) de C et C_n, telle que f_n, g_n, h_n tendent uniformément vers f, g, h. On obtiendra une correspondance quelconque en remplaçant dans $f_n(t)$, $g_n(t)$ et $h_n(t)$: t par $\theta_n(t)$ fonction continue et croissante de 0 à 1. Le point M_n qui correspondra ainsi au point M de C donné par une valeur t du paramètre, aura pour coordonnées :

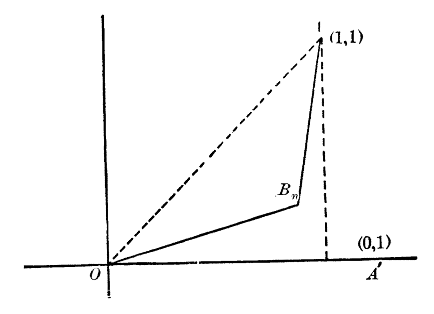
$$x = f_n[(\theta_n(t)], \qquad y = g_n[\theta_n(t)], \qquad z = h_n[\theta_n(t)].$$

Lorsque n croit indéfiniment ce point peut avoir un ou plusieurs points limites en général distincts de M, mais : *tous ces points limites sont des points de C.* En effet, soit N une point limite de M_n : on peut trouver n_1, n_2, $\cdots$ tels que la suite M_{n_1}, M_{n_2}, $\cdots$ tend vers N. Mais, pour la valeur de t considérée, les nombres $\theta_{n_1}(t)$, $\theta_{n_2}(t)$, $\cdots$ sont les abscisses de points compris entre 0 et 1 qui ont par suite un point limite $\theta(t)$. Il y a donc dans $\theta_{n_1}(t)$, $\theta_{n_2}(t)$, $\cdots$ une suite : $\theta_{p_1}(t)$, $\theta_{p_2}(t)$, $\cdots$ qui tend vers un nombre déterminé $\theta(t)$. Or on a :

$$|f_{p_i}[\theta_{p_i}(t)] - f[\theta(t)]| < |f_{p_i}[\theta_{p_i}(t)] - f[\theta_{p_i}(t)]| + |f[\theta_{p_i}(t)] - f[\theta(t)]|.$$

Puisque f_n tend vers f *uniformément* le premier terme du second membre tend vers zéro. Il en est de même du second puisque $f(t)$ est continue. Donc $f_{p_i}[\theta_{p_i}(t)]$ tend vers $f[\theta(t)]$; de même pour les deux autres coordonnées ; par conséquent les points M_{p_1}, M_{p_2}, $\cdots$ qui tendent vers N, tendent aussi vers le point de C de coordonnées : $f[\theta(t)]$, $g[\theta(t)]$, $h[\theta(t)]$. Donc N est sur C.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie : *tout point de C n'est pas nécessairement point limite de points M_n.* Ainsi prenons en particulier



pour $\theta_n(t)$ une fonction continue croissante de 0 à 1 mais qui tend vers 0 pour $t \neq 1$ et vers 1 pour $t = 1$. Alors on voit que l'on établit entre C et C_n une correspondance telle que tout point M_n de C_n correspondant à un point M fixe

quelconque de C tend vers l'origine de l'arc C, sauf si M est l'extrémité de C, cas où M_n tend vers cette extrémité. [Il suffit pour construire les fonctions θ_n, de considérer l'équation $y = \theta_n(x)$ comme l'équation dans le plan $0xy$ de la ligne brisée $0B_nA$ où A est un point fixe de coordonnées $(1, 1)$ et où B_n est un point du triangle rectangle $0A'A$ tendant vers le point A', $(1, 0)$.]

THÉORÈME 4. *La condition nécessaire et suffisante pour qu' un arc continu C_n tende vers un arc continu déterminé C lorsque n croit indéfiniment est que, quel que soit ϵ, on puisse trouver un nombre entier n tel que quel que soit l'entier p l'écart (C_n, C_{n+p}) soit inférieur à ϵ.*

Cette condition est évidemment nécessaire, car si C_n tend vers un arc continu C, on pourra prendre un entier g tel que l'on ait $(C, C_n) < \epsilon/2$ pour $n > g$. Alors on aura :

$$(C_n, C_{n+p}) \leq (C, C_n) + (C, C_{n+p}) < \frac{\epsilon}{2}$$

quel que soit p pour $n > g$.

Réciproquement, supposons qu'une telle condition soit vérifiée. Alors quel que soit l'entier n, on pourra trouver un entier croissant r_n, tel que l'on ait quel que soit p :

$$(C_{r_n}, C_{r_n+p}) < \frac{1}{n^2}.$$

Appelons Γ_n la courbe C_{r_n}; on voit que l'on aura quels que soient n et p :

$$(\Gamma_n, \Gamma_{n+p}) < \frac{1}{n^2}.$$

Ceci étant, choisissons les représentations paramétriques de $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$; on sait qu'étant donnée la représentation d'une arc continu Γ_n, on peut toujours choisir celle de Γ_{n+1} de façon qu'en appelant $d_{n, n+1}$ le maximum de la distance de deux points correspondants, on ait :

$$d_{n, n+1} < (\Gamma_n, \Gamma_{n+1}) + \frac{1}{n^2}.$$

Nous pourrons ainsi choisir successivement les représentations de $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$ de façon à satisfaire à cette condition et par conséquent à :

$$d_{n, n+1} < \frac{2}{n^2}.$$

D'ailleurs, on aura évidemment par un raisonnement analogue à celui employé pour le théorème 2 :

$$d_{n, n+p} \leq d_{n, n+1} + d_{n+1, n+2} + \cdots + d_{n+p-1, n+p}$$

quels que soient n et p et par suite :

$$d_{n,\,n+p} < \frac{2}{n^2} + \frac{2}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{2}{(n+p-1)^2} < \rho_n$$

ρ_n étant le reste de la série dont le terme général est $2/n^2$. Si donc la représentation choisie pour Γ_n est:

$$x = f_n(t), \qquad y = g_n(t), \qquad z = h_n(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

on voit que l'on aura quels que soient n et p:

$$|f_n - f_{n+p}| < \rho_n, \qquad |g_n - g_{n+p}| < \rho_n, \qquad |h_n - h_{n+p}| < \rho_n \quad (0 \leqq t \leqq 1).$$

ρ_n étant un nombre indépendant de t qui tend vers zéro avec $1/n$. Par conséquent f_n, g_n, h_n convergent uniformément vers trois fonction continues f, g, h (d'après un théorème connu de CAUCHY). Dès lors Γ_n tend vers un arc continu Γ. Alors il en aussi de même des courbes C_1, C_2, $\cdots$. En effet, on a:

$$(\Gamma,\ C_p) \leqq (\Gamma,\ C_{r_n}) + (C_{r_n},\ C_p).$$

Donc en prenant $p > r_n$ et r_n assez grand, on pourra rendre chacun des deux derniers termes plus petit qu'une quantité arbitraire donnée. Par suite $(\Gamma,\ C_p)$ tend vers zéro: il est bien démontré que C_p tend vers un arc continu quand p croit indéfiniment. D'ailleurs il pourra fort bien arriver que cet arc soit réduit à un point.

Ensembles compacts.

Nous dirons qu'un ensemble E d'arcs continus est compact s'il ne comprend qu'un nombre fini d'éléments ou bien, dans le cas contraire, si tout ensemble H formé d'une infinité de courbes de E admet au moins une courbe limite. * Il est entendu qu'un ensemble H admet une élément limite Γ, s'il existe dans H une infinité d'éléments *distincts*: C_1, C_2, $\cdots$, C_n, $\cdots$ qui tendent vers Γ.

Nous allons maintenant chercher la condition pour qu'un ensemble de courbes soit compact. Pour y arriver nous introduirons *l'indice de compacité* d'un ensemble de courbes: Nous appellerons ainsi un nombre ν égal à zéro si l'ensemble E considéré ne comprend qu'un nombre fini de courbes distinctes et défini ainsi dans le cas contraire: Soit S une suite infinie de courbes distinctes C_1, C_2, $\cdots$, C_n, $\cdots$ de l'ensemble E; appelons ϵ_n la limite supérieure des écarts $(C_n,\ C_{n+1})$, $(C_n,\ C_{n+2})$, $\cdots$ et λ_S la plus grande des limites de ϵ_n. Si H est un ensemble formé d'une infinité de courbes de E, à toute suite infinie S contenue dans H correspondra un nombre déterminé λ_S et nous pourrons prendre la limite inférieure μ_H des nombres λ_S. Par définition, l'indice de compacité de E sera la limite supérieure ν de μ_H quand H est quelconque dans E. Les quantités ϵ_n, λ_S, μ_H, ν sont d'ailleurs positives on nulles, finies on infinies, mais bien déterminées.

* Voir la note déja citée des Comptes-Rendus du 21 Nov., 1904.

THÉORÈME 5. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E d'arcs continus soit compact est que son indice de compacité soit nul.*

La condition est nécessaire. En effet, si E n'a qu'un nombre fini d'éléments, ν est nul par définition. Dans le cas contraire, quel que soit H dans E, il y a une suite convergente S de courbes de H et d'après le théorème V, on aura évidemment $\lambda_S = 0$ d'où $\mu_H = 0$. Alors μ_H étant constamment nul, sa limite supérieure ν sera aussi nulle.

Réciproquement supposons nul l'indice de compacité de E. On bien E n'a qu'un nombre fini d'éléments et alors c'est un ensemble compact, on bien μ_H sera nul pour tout ensemble H formé d'une infinité de courbes de E. Considérons l'un quelconque d'entre eux ; je dis qu'il admet une courbe limite (ce qui suffit pour démontrer le théorème). En effet, dans le cas contraire, il n'y aurait aucune suite infinie S de courbes de H telles que λ_S soit nul. Puisque la limite inférieure ν des λ_S est nulle, il faut donc que quel que soit le nombre positif ϵ_1, on puisse trouver dans H, une suite S_1 telle que $0 < \lambda_{S_1} < \epsilon_1$. Mais S_1 étant formée d'éléments de E_1, on a $\mu_{S_1} = 0$ et le même raisonnement s'applique à S_1 comme à H. S_1 n'admet aucune limite sans quoi il en serait de même de H. On peut donc trouver dans la suite S_1: $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, C_3^{(1)}, \cdots, C_n^{(1)}, \cdots$ une suite infinie S_2 de courbes: $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, C_3^{(2)}, \cdots, C_n^{(2)}, \cdots$ telle que $0 < \lambda_{S_2} < \epsilon_2$. On peut même supposer que les éléments de la suite S_2 se trouvent disposés dans le même ordre que dans S_1. On pourra répéter le même raisonnement sur S_2 et ainsi de suite. On formera ainsi des suites $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ telles que $\lambda_{S_n} < \epsilon_n$ quel que soit n. Prenons par exemple $\epsilon_n = 1/n$ et considérons la suite S: $C_1^{(1)}, C_2^{(2)}, C_3^{(3)}, \cdots, C_n^{(n)}, \cdots$. A partir du rang n, elle est formée d'éléments qui figurent tous dans S_n et dans le même ordre. On en déduit facilement l'inégalité $\lambda_S \leq \lambda_{S_n}$ quelque soit n et par suite $\lambda_S = 0$. Donc il y aurait dans H une suite S telle que $\lambda_S = 0$; nous arrivons ainsi à la contradiction annoncée.

Remarque. C'est à M. ASCOLI que revient le mérite d'avoir trouvé le premier une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de courbes continues soit compact.* Mais la condition que nous avons donnée au théorème 5 nous parait préferable au point de vue théorique. En effet, il est nécessaire de connaître une représentation paramétrique déterminée des courbes de l'ensemble pour s'assurer si la condition de M. ASCOLI est satisfaite. Au contraire, il suffit pour calculer notre indice de compacité de connaître l'ensemble des valeurs des écarts des courbes de E deux à deux. Toute autre indication sur la forme ou la position des courbes de E est superflue pour ce calcul. Nous n'utilisons donc que des éléments géométriques et seulement ceux qui sont essentiels.

PARIS, *Mai*, 1905.

---

* G. ASCOLI, *Sulle curve limite di una varietà data di curve*, Accademia dei Lincei, 1884. Voir aussi : C. ARZELÀ : *Funzioni di linee*, Accademia dei Lincei, 1889.